FIJACIÓN DE PRECIOS EN TRANSPORTE URBANO: TRANSPORTE PÚBLICO Y PRIVADO(*)

Harvy Vivas Pacheco[1]

Resumen

Este paper deriva un sistema de precios óptimo para el transporte urbano en el que existe un sistema público de transporte masivo que compite con el transporte privado. El ejercicio supone que los viajes en diferentes modos y tiempos se hacen en medios que no son sustitutos perfectos y que el transporte privado genera unos costos de congestión mayores que el público. En la primera parte se hace una rápida revisión de la literatura relacionada y luego se deducen los efectos de estática comparada.

Abstract.

This paper deduces an optimal price system for the urban transportation in competition between a public transporting mass system and the private cars. At first, the study assumes that the transportation facilities of the users are not perfect substitutes and, secondly, that the costs of congestion that the private transportation generates are more expensive for society. I achieve a quick review of the related studies in the first part, and afterward I approach the analysis of the different cases.

(*) Supported by the Programme Alβan, European Union Programme of High Level Scholarships for Latin America IN:E03D25353CO, and the Universidad del Valle, Cali, Colombia.

[1] Profesor del Departamento de Economía de la Universidad del Valle. Doctor/Cum Laude en Economía Aplicada (Universitat Autònoma de Barcelona, 2008). Miembro del Grupo de Investigación en Economía Regional y Ambiental de la Universidad del Valle reconocido por Conciencias. harvivas2002@yahoo.com

1. Introducción

Este trabajo se ocupa de la derivación de un sistema de precios óptimo para el transporte urbano en el que existe un sistema público de transporte masivo que compite con el transporte privado. El ejercicio supone que los viajes en diferentes modos y tiempos se hacen en medios que no son sustitutos perfectos y que el transporte privado genera unos costos de congestión mayores que el público. En la primera parte se hace una ligera revisión de la literatura para luego proseguir con el ejercicio.

2. Fijación de Precios en transporte

La fijación de precios óptimos en el sector del transporte corresponde a un caso especial de un bien *no almacenable* con demanda que oscila con el ciclo del día y con efectos de estacionalidad a lo largo de un año típico. Su estructura de costos es especial y se caracteriza por la presencia de costos operativos asociados a los volúmenes de tráfico, costos de capacidad relacionados con el volumen de producción en periodos determinados (horas punta y horas valle en un día normal) y la presencia de costos fijos que varían mucho en función del medio de transporte (tren, carretera, aéreo, etc.).

Por tal razón, la fijación de un sistema óptimo de precios, tomando algún criterio de bienestar, se enfrenta a la dificultad de poder edificar un sistema que tenga en cuenta las demandas fluctuantes, así como los efectos externos (contaminación y accidentalidad) que afectan la función de costo generalizado de viaje (Arnott y Kraus, 2003).

De acuerdo con la tradición de los trabajos pioneros, los precios óptimos de las horas punta deberían tener en cuenta los costos marginales relevantes (capacidad y operación), mientras que en las demandas valle estos precios sólo debería considerar el costo de operación asociado. Este sistema de fijación implica entonces que los precios en períodos de punta deberían ser superiores a los de los períodos valle de la demanda. No obstante, tal como lo señala Panzar (1976) la fracción adicional de los costos de capacidad que tienen que asumir los usuarios en hora punta se debe a los supuestos tecnológicos de la literatura tradicional y no a la naturaleza fundamental del problema, de este modo la fijación de una tecnología neoclásica hace que la carga se distribuya en todos los períodos.

De otra parte, el abandono del supuesto de tecnologías de proporciones fijas con la implicación de rendimientos constantes a escala y la no sustituibilidad factorial (Mohring, 1972), permite la aparición de rendimientos crecientes a escala, de tal modo que los costos marginales varían y son diferentes a los costos unitarios de producción, haciendo así que el nivel de output, que as u vez depende de las horas punta o valle, determine los costos totales y marginales y en consecuencia el sistema de tarifación óptimo. En este marco analítico, la dificultad reside en que en condiciones de optimalidad es posible que se requiera una producción con pérdida, lo que obliga a buscar un nuevo sistema de fijación de precios de “second best”, ya inaugurados por Ramsey desde el año 1927 y desarrollado por Baumol y Bradford (1970).

En este orden de ideas, la literatura avanza hacia la identificación de un sistema de desviaciones óptimas de los precios respecto a la solución de primera preferencia a corto plazo. Los diversos trabajos se concentran así en la relación existente entre esta desviación y las elasticidades de la demanda entre modos y períodos.

En síntesis, son varios los factores que hacen difícil el cálculo de un sistema de precios óptimos de primera preferencia: los costos externos, así como los costos generalizados de viaje, varían a lo largo del día si tenemos en cuenta la presencia de horas punta y valle en la utilización de los diversos modos de transporte. De igual modo, en algunos países, además se incluyen tasas y sobretasas a la gasolina que parecen implicar en principio la internalización de algunos de los costos asociados a la generación de viajes dentro de una ciudad. Finalmente, otro aspecto que hace difícil el establecimiento de un sistema de precios óptimos se aprecia en la necesidad de optimización simultánea en escenarios de elasticidades cruzadas entre modos y períodos del día, tal como lo subrayan Glaister y Lewis (1978).

Este panorama muestra que en principio es difícil reconciliar los diversos resultados si se tiene en cuenta que los estudios se aplican a países y regiones diferentes y en años diferentes. Adicionalmente, también difieren en el marco y en las consideraciones, por ejemplo, en los estudios para Bélgica la inclusión de efectos contaminantes y las externalidades de accidentes tienen en cuenta un sistema impositivo sobre los combustibles pre-existente, además de las interacciones con el sistema fiscal, mientras que otras investigaciones no toman en cuenta estos aspectos a priori.

En la literatura empírica, diversos estudios han estimado sistemas óptimos de precios, por ejemplo, para Londres Glaister y Lewis estimaron márgenes entre el 50-60% de los costos marginales; Para Bélgica, De Borger et al., (1996), estiman que las tarifas óptimas del tránsito serían 114% de los costos medios si hay presencia de ajustes proporcionales y si se logra sostener la frecuencia del servicio. De manera concomitante con la literatura anterior, existe una amplia literatura que dando paso a otras alternativas de fijación de precios por fuera de las decisiones de primera preferencia, se ocupa de los subsidios al transporte público intra e interurbano. En conjunto, para los Estados Unidos las tarifas de transporte solamente cubrían, a mediados de los noventa, el 56 por ciento de costos que opera para el transporte masivo. De ahí la importancia de ponderar un sistema de tarifas óptimas que permitan profundizar en las razones que se exponen con frecuencia para el establecimiento de subsidios en este sector. Entre las principales razones de estos subsidios se destacan la necesidad de reducir el uso continuo del automóvil con el fin de disminuir los efectos externos que conlleva, tales como la congestión, los accidentes, y la contaminación atmosférica. Por tal razón se argumenta que las subvenciones al transporte público son una respuesta de segunda preferencia que resultan apropiadas cuando la fijación de un sistema de precios de primera preferencia no resulta factible. De otra parte, la presencia de economías de escala en el transporte masivo (Mohring 1972, Jansson 1979) también se esgrime como una de las fuentes que justificarían en principio la subvención al transporte masivo.

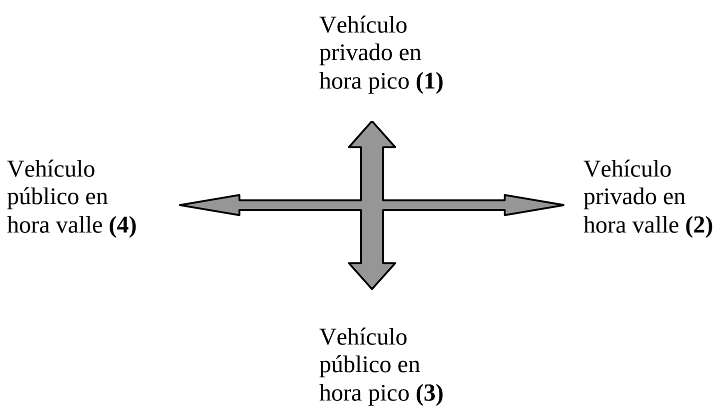
3. El modelo

La estructura del modelo toma como punto de partida la existencia de una función de utilidad del hogar *h*-ésimo cuyos argumentos se pueden clasificar en las cantidades consumidas de un bien agregado a la Marshall-Hicks, el consumo de servicios de transporte (clasificado en dos modos y dos períodos del día), las velocidades medias por cada servicio, el efecto ambiental y finalmente el número de accidentes para cada uno de los servicios. En forma más general, esta función se caracteriza por ser cuasi-concava con una función implícita de sub-utilidad de viajes.

Algunos autores, (Parry and Small, 2002) a diferencia de De Borger, et., al., (1996) excluyen del núcleo de la función, la desutilidad de los costos externos por polución y accidentes y lo definen de manera externa al núcleo, incluyendo solamente la desutilidad de la congestión como argumento interno de la función.

En todo caso, la utilidad es decreciente con el nivel de congestión y los efectos externos, así como creciente con los demás argumentos.

Para efectos de notación y siguiendo la tradición de esta literatura utilizaré superíndices para denotar las modalidades de transporte en cada uno de los períodos, de acuerdo con la siguiente convención:



A modo de esquema el ejercicio consiste en la maximización de una función de bienestar social de Bergson.Samuelson con las utilidades indirectas como argumentos en tres tipos de modelos ***a) sin restricciones sobre los precios pico y valle***, ***b) con restricciones de igualdad*** y ***c) con restricciones de presupuesto del gobierno***, tal como lo plantea De Borger, et., al., (1996); finalmente se estima la regla de fijación de precios en el caso que los usuarios de vehículo privado paguen un precio implícito equivalente al costo medio.

La función extensa de utilidad depende del consumo del bien agregado (Z), el número de kilómetros viajados en cada uno de los servicios (x^i), de las velocidades de los medios respectivos (V^i), lo efectos ambientales (E) y del número de accidentes por servicio:

$$U_h = u_h(Z; x^1, x^2, x^3, x^4; V^1, V^2, V^3, V^4; E; A^1, A^2, A^3, A^4)$$

Las velocidades medias por servicio dependen del número total de vehículos kms (Q^i) para el servicio i en cada uno de los períodos, de tal modo que se definen cuatro funciones:

Hora pico

$$V^1 = V^1(Q^1, Q^3)$$
$$V^3 = V^3(Q^1, Q^3)$$

Hora Valle

$$V^2 = V^2(Q^2, Q^4)$$
$$V^4 = V^4(Q^2, Q^4)$$

de tal manera que Y decrece con Q y, a su vez, Q es una función del número de pasajeros km en el servicio i:

$$Q^i = Q^i(X^i), \forall_{i=1,2,3,4}$$

La forma reducida depende además de los siguientes argumentos, en donde X^i , es el número de pasajeros kilómetros en el servicio i.

$$U*_h = u*_h\,(Z; x^1, x^2, x^3, x^4; X^1, X^2, X^3, X^4)$$

A partir de la función extensa de utilidad se obtiene la forma reducida que depende de los precios de los bienes agregados, de las tarifas de viaje, el número de kilómetros viajados y del número de pasajeros kilómetro en cada una de las modalidades y períodos.

La *función de utilidad indirecta* en su forma extensa y reducida tiene como argumentos los precios del bien compuesto (Pz) y de los servicios (P^i), el ingreso individual del hogar h-ésimo (Y) y los argumentos asociados a la externalidad.

Forma extensa:

$$W_h = w_h(P_z; p^1, p^2, p^3, p^4; Y_h, V^1, V^2, V^3, V^4; E; A^1, A^2, A^3, A^4)$$

Forma Reducida:

$$w_h = w_h(P_z; p^1, p^2, p^3, p^4; Y_h, X^1, X^2, X^3, X^4)$$

De aquí se obtienen las *funciones de demanda compensada* x^i_h y la *función de gasto* individual para el hogar o individuo h-ésimo (g_h).

$$x^i{}_h = x^i{}_h(P_z; p^1, p^2, p^3, p^4; Y_h, X^1, X^2, X^3, X^4; u_h)$$

$$g^i{}_h = g^i{}_h(P_z; p^1, p^2, p^3, p^4; Y_h, X^1, X^2, X^3, X^4; u_h)$$

De otra parte existe un *costo marginal externo* que incluye los efectos de la congestión, los efectos ambientales y los costos de accidentalidad por el tráfico adicional del tipo i.

$$CMg^i{}_{ext} = \frac{\partial g(.)}{\partial X^i} = -\frac{\partial w_h / \partial X^i}{\partial w_h / \partial Y^i}$$

Además se definen las *funciones de costos* con argumentos (el número total de vehículos kms para el servicio i=1,2,3,4, Q, y el número de pasajeros km en el servicio,X^i.

Transporte privado

$$C^1 = C^1(Q^1, X^1)\,;\; C^2 = C^2(Q^2, X^2)$$

Transporte público

$$C^3 = C^3(Q^3, X^3)\,;\; C^4 = C^4(Q^4, X^4)$$

La forma reducida de estas funciones depende solamente de X^i , para todo i = 1,2,3,4.

De este modo se estiman las **REGLAS ÓPTIMAS DE PRECIOS** a partir de la maximización de las respectivas funciones de utilidad, de acuerdo con los casos a, b y c, antes mencionados y teniendo en cuenta las restricciones del sector público.

Cabe destacar que el principio de definición de tarifas es el mismo que para el caso más sencillo, aunque con un mayor grado de desagregación; la idea básica es la de tener en cuenta en las tarifas óptimas los costos marginales del productor más los costos adicionales impuestos a los demás usuarios del sistema de transporte.

En este caso se trata de maximizar una función agregada de bienestar social $BS(w_1,w_2,...,w_h)$ de Bergson –Samuelson , teniendo en cuenta de manera adicional, tal como lo hace De Borger, et., al., (1996); que en una situación en la que es difícil tomar en cuenta la combinación de impuestos y efectos redistributivos para el gobierno, implica un costo marginal de los fondos públicos mayor que uno (Ibid., p. 35) que hace entonces que el *precio sombra de los fondos públicos* $(1+\lambda) > 1$ y en efecto $\lambda>0$. No obstante, en algunos casos, por comodidad se puede suponer un valor unitario de estos fondos sin menoscabo de las principales conclusiones.

A continuación se resumen el problema de optimización en los tres casos antes mencionados:

Caso a) *Sin restricciones sobre precios pico y valle*

$$\boxed{MAX^{P^i}\, BS(w_1, w_2(...)w_H) + (1+\lambda)[\sum (p^i X^i - c^i) - CF], \forall_i}$$

Caso b) *Con restricciones sobre precios pico y valle homogéneos*

$$\boxed{MAX^{p^C, p^B}\, BS(w_1, w_2(...)w_H) + (1+\lambda)[(p^C X^C - c^C) + (p^B X^B - c^B) - CF]},$$

C superíndice indica el vehículo privado y B el bus o transporte público.

Caso c) *Con restricciones de presupuesto del gobierno*

$$MAX^{P^i}\, BS(w_1, w_2(...)w_H) + (1+\lambda)[\sum (p^i X^i - c^i) - CF]$$

$$^{sa)}\, CF + c^3 + c^4 = p^3 X^3 + p^4 X^4$$

En los tres casos se diferencias respecto a cada uno de los precios (en (a) y (c) respecto a todo i=1,2,3,4; en (b) respecto a los precios de transporte privado y público) y usando la teoría de la dualidad y la identidad de Roy [con el fin de utilizar la función de gasto y derivar las condiciones de primer orden del ejercicio].

De la misma manera que en otros estudios, Glaister (1974), Glaister y Lewis (1978); Parry and Small (2002), el costo marginal social de un viaje privado extra en determinadas horas del día *i*, viene conformado por el costo marginal de operación del vehículo privado o público y del valor monetario de los tiempos de viaje adicionales causados por la congestión en horas pico (1 y 3). Si definimos ϕ la utilidad marginal social del ingreso y tenemos en cuenta la expresión de los costos marginales externos generalizados, se obtiene la *expresión más amplía del costo social* que incorpora además de los efectos de congestión, los demás costos externos:

$$S^i = \sum_{h=1}^{H} \phi CMg_{ext} + \partial c^i / \partial X^i, \forall_{i=1,2,3,4}$$

La ventaja de este enfoque reside en el grado de detalle de las relaciones obtenidas, respecto a otros trabajos en los que se llega a una solución agregada sin discriminar cada una de las restricciones. Es importante anotar, que las dificultades técnicas hacen poco factible establecer en un sistema real, la diferenciación entre tarifas de hora punta y de hora valle, de ahí la relevancia del ejercicio de extensión planteado en b) por De Borger, et., al., (1996); al modelo de Glaister y Lewis (1978)[2].

No sobra anotar que cuando i=2,4, los costos asociados corresponden en estricto a costos externos (polución, accidentes, etc., generados por la actividad de viajar), mientras que en i=1,3, se suman además los costos de la congestión generados sobre los demás usuarios por la decisión de viajar en vehículo privado o público.

Tal como se anotó al comienzo de este documento, suponemos que el efecto sobre costos, derivado de la congestión es mayor en el caso de los vehículos privados que en el transporte público. No obstante, es preciso tener en cuenta, tal como lo señala Glaister (1974) que el transporte público, debido a las múltiples paradas y velocidades representa un porcentaje elevado de estos costos de congestión.

En el caso que aquí interesa, lo importante de resaltar en la última expresión es que una unidad de viaje adicional en *i* iguala el costo marginal de operación con la suma ponderada de costos marginales externos.

A continuación se resumen los resultados de mayor relevancia en el ejercicio de optimización para cada uno de los tres casos estudiados.

Para efectos de simplificación, suponemos que el precio sombra de los fondos públicos es unitario, aunque levantar este supuesto no presenta mayores dificultades para el objetivo del ejercicio aquí desarrollado. De igual manera, las elasticidades precio de las demandas propias y cruzadas utilizan la siguiente notación:

$$\varepsilon_j^i = \frac{\partial X^i}{\partial p^j}\frac{p^j}{X^i} \equiv \frac{\Delta\% X^i}{\mathrm{V}\% p^j}$$

Obsérvese que cuando i=j tenemos las elasticidades propias, mientras que si i=1 y j=3, corresponde al grado de sustituibilidad entre vehículo privado en hora pico y el transporte público en hora pico; un supuesto útil y simplificador de las expresiones básicas hace que las demandas cruzadas entre horas pico y valle sean iguales a cero, de tal modo que si representamos en forma matricial el sistema de demandas obtenemos el resultado de la derecha:

[2] Las extensiones del modelo se resumen en i) la introducción explícita de la distribución del bienestar ii)la inclusión de los costos sociales (congestión, ambientales y accidentes) públicos y privados, iii)Precios públicos y privados los tratan como variables de política, iv) la demanda de los servicios explícitamente depende de los precios y de las velocidades v) las posibilidades de ausencia de discriminación entre horas pico y valle y la imposición de restricciones de presupuesto al sector público, (Ibid, p. 32).

$$\begin{matrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 & \varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^4 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_3^3 & \varepsilon_3^4 \\ \varepsilon_4^1 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^3 & \varepsilon_4^4 \end{matrix} = \begin{matrix} \varepsilon_1^1 & 0 & \varepsilon_1^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^2 & 0 & \varepsilon_2^4 \\ \varepsilon_3^1 & 0 & \varepsilon_3^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^2 & 0 & \varepsilon_4^4 \end{matrix}$$

Caso a) *Sin restricciones sobre precios pico y valle*

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la regla de precios óptimos en este caso se escribe de la siguiente manera:

Transporte privado

$$\varepsilon_1^1[S^1X^1+(0)\frac{\partial c^1}{\partial X^1}X^1-p^1X^1+\varepsilon_1^3[S^3X^3+(0)\frac{\partial c^3}{\partial X^3}X^3-p^3X^3]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^1}{X^1}-1]p^1X^1$$

$$\varepsilon_2^2[S^2X^2+(0)\frac{\partial c^2}{\partial X^2}X^2-p^2X^2]+\varepsilon_2^4[S^4X^4+(0)\frac{\partial c^4}{\partial X^4}X^4-p^4X^4]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^2}{X^2}-1]p^2X^2$$

$$\varepsilon_3^1[S^1X^1+(0)\frac{\partial c^1}{\partial X^1}X^1-p^1X^1]+\varepsilon_3^3[S^3X^3+(0)\frac{\partial c^3}{\partial X^3}X^3-p^3X^3]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^3}{X^3}-1]p^3X^3$$

$$\varepsilon_4^2[S^2X^2+(0)\frac{\partial c^2}{\partial X^2}X^2-p^2X^2]+\varepsilon_4^4[S^4X^4+(0)\frac{\partial c^4}{\partial X^4}X^4-p^4X^4]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^4}{X^4}-1]p^4X^4$$

Transporte público:

Como se puede apreciar, suponer que el precio sombra de los fondos públicos es unitario y $\lambda=0$, implica entonces que el gobierno puede usar instrumentos de primera preferencia, de tal modo que al eliminar el componente precedido por cero en el sistema anterior se llega a que el costo marginal social configura una solución optima del problema. Las ecuaciones de la izquierda muestran que las elasticidades precio propias y las cruzadas actúan como ponderadores del sistema de precios óptimos.

$$\varepsilon_1^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_1^3[S^3X^3 - p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^1}{X^1} - 1]p^1X^1$$
$$\varepsilon_2^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_2^4[S^4X^4 - p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^2}{X^2} - 1]p^2X^2$$
$$\varepsilon_3^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_3^3[S^3X^3 - p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^3}{X^3} - 1]p^3X^3$$
$$\varepsilon_4^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_4^4[S^4X^4 - p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^4}{X^4} - 1]p^4X^4$$

Caso b) *Con restricciones sobre precios pico y valle homogéneos*

Como se anotó con anterioridad, la definición de un sistema homogéneo de precios que no distinga entre horas pico y valle es más frecuente en la práctica, por tal razón si en este ejercicio definimos solamente los dos modos sin distinguir horas del día, el resultado se simplifica a las siguientes expresiones:

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_C^i (S^i - p^c) X^i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_B^i (S^i - p^B) X^i = 0$$

Estas expresiones permiten apreciar que los precios se asocian a un promedio ponderado del costo marginal social en las horas pico y valle, de tal modo que los mayores precios dependen del valor de las elasticidades que actúan como ponderadores en la fijación de precios homogéneos para vehículos privados y públicos.

Caso c) Con restricciones de presupuesto del gobierno

En este caso el ejercicio de optimización introduce un multiplicador de Lagrange (θ) asociado a la restricción de presupuesto del gobierno que puede formularse de la siguiente manera: $CF + c^3 + c^4 = p^3X^3 + p^4X^4$

Las condiciones de primer orden quedan expresadas, manteniendo los supuestos de elasticidades cruzadas utilizadas en los casos a) y b):

$$\varepsilon_1^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_1^3[S^3X^3 - \theta\frac{\partial c^3}{\partial X^3} - (1-\theta)\,p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^1}{X^1} - 1]p^1X^1$$

$$\varepsilon_2^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_2^4[S^4X^4 - \theta\frac{\partial c^4}{\partial X^4} - (1-\theta)\,p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^2}{X^2} - 1]p^2X^2$$

$$\varepsilon_3^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_3^3[S^3X^3 - \theta\frac{\partial c^3}{\partial X^3} - (1-\theta)\,p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^3}{X^3} - (1-\theta)]p^3X^3$$

$$\varepsilon_4^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_4^4[S^4X^4 - \theta\frac{\partial c^4}{\partial X^4} - (1-\theta)\,p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^4}{X^4} - (1-\theta)]p^4X^4$$

Tal como lo realiza De Borger, et., al., (1996: 38), resulta instructivo considerar las reglas óptimas de precios bajo el supuesto de ajuste de primera preferencia por el gobierno, lo cual conduce en nuestro caso a:

$$\varepsilon_1^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_1^3[S^3X^3 - \theta\frac{\partial c^3}{\partial X^3} - (1-\theta)\,p^3X^3] = 0$$

$$\varepsilon_2^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_2^4[S^4X^4 - \theta\frac{\partial c^4}{\partial X^4} - (1-\theta)\,p^4X^4] = 0$$

$$\varepsilon_3^1[S^1X^1 - p^1X^1] + \varepsilon_3^3[S^3X^3 - \theta\frac{\partial c^3}{\partial X^3} - (1-\theta)\,p^3X^3] = -\theta X^3p^3$$

$$\varepsilon_4^2[S^2X^2 - p^2X^2] + \varepsilon_4^4[S^4X^4 - \theta\frac{\partial c^4}{\partial X^4} - (1-\theta)\,p^4X^4] = -\theta X^4p^4$$

Debe apreciarse que, a manera de ejemplo, sin sustituibilidad entre transporte privado y público, las elasticidades correspondientes a las combinaciones (1,3) y (3,1) serían cero y, en consecuencia, los precios se formarían a partir de la regla convencional de precios iguales a los costos marginales sociales:

$$P^i = S^i$$

Lo anterior, teniendo en cuenta de nuevo que el costo marginal social incluye, además de los efectos de congestión, todos los demás efectos externos derivados de la contaminación atmosférica, el ruido y los accidentes.

d) Un cuarto caso: p^1 y p^2 fijados con costos medios

A continuación se estudia un cuarto caso en el que el transporte privado paga un precio equivalente al costo unitario de producción. De acuerdo con lo desarrollado hasta el momento, tenemos que el suministro de servicios privados [individuos que se desplazan en sus coches particulares en horas punta y valle (1 y 2)], se hace a unos precios implícitos:

$$P^1 = Cme^1$$
$$P^2 = Cme^2$$

La idea principal estriba en la fijación de precios que desviándose de la regla de primera preferencia, permita al gobierno cubrir los costos con el menor impacto sobre el bienestar social en términos de pérdida de eficiencia (óptimo de segunda preferencia).

La opción mixta aquí planteada generaría un valor menor para la función objetivo en la medida que el precio que se obtenga será superior al óptimo de primera preferencia, dado que en principio se obtendría en alguno de los casos un valor nulo para el excedente del productor.

Ahora bien si el modelo se planteara en términos de costes medios decrecientes, entonces la fijación de precios, p^j, que igualen los costes medios, en principio solventaría el problema del déficit a cambio de las pérdidas derivadas de eficiencia. De acuerdo con la literatura sobre precios óptimos, este modelo de fijación de precios configura una variante del modelo general de costes plenamente distribuidos (*Full Distributed Costs*), el cual implica que los costes generalizados de producción del bien o servicio i-ésimo, Ci, se distribuyan entre los usuarios, cuya demanda total es de Xi unidades, de tal forma que no se produzcan pérdidas.

En el caso aquí planteado podríamos interpretar la regla de fijación, teniendo en cuenta el costo económico completo en los casos de vehículos privados en horas punta y valle, de tal modo que el costo unitario correspondiente incluiría para los usuarios privados las cargas anuales de recuperación de la inversión el vehículo, descontadas a una tasa de interés r para la vida útil del vehículo (t) (teniendo en cuenta los valores de reemplazamiento (S) y de recuperación (R). Adicional a esto, están los costos operativos y de mantenimiento (C^o) por unidad de tiempo.

De aquí entonces, la carga anualizada, o por unidad de tiempo, de recuperación de la inversión privada (CA^i), toma la siguiente forma:

$$CA^i = \frac{(M-R)^r(1+r)^t}{(1+r)^t} + R; \forall i = 1,2$$

De aquí entonces que los costos unitarios para vehículos privados en horas punta y valle puedan escribirse como sigue:

$$p^1 \equiv Cme^1 = \frac{CA^1 + C^{1O}}{X^1}$$

$$p^2 \equiv Cme^2 = \frac{CA^2 + C^{2O}}{X^2}$$

A partir delos resultados anteriores el ejercicio de optimización puede expresarse de la siguiente manera, sin incluir restricciones de homogeneidad en los períodos pico y valle, ni restricción de presupuesto del gobierno:

$$\boxed{\begin{array}{l} MAX^{p^i}\, BS(w_1, w_2(\ldots)w_H) + (1+\lambda)[\sum(p^i X^i - c^i) - CF], \forall_{i=3,4} \\ ^{sa)}\; p^1 = Cme^1 \\ p^2 = Cme^2 \end{array}}$$

Si suponemos que las elasticidades cruzadas entre horas pico y valle intra-modales son cero y el precio sombra de los fondos públicos sigue el patrón establecido en los ejercicios anteriores, entonces las condiciones de primer orden pueden escribirse de la siguiente manera, considerando β_1 y β_2 los multiplicadores de Lagrange respectivos.

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_1^1[S^1X^1 - (1-\beta_1-\beta_2)p^1X^1] + \varepsilon_1^3[S^3X^3 - p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^1}{X^1} - (1-\beta_1-\beta_2)]p^1X^1 \\ \varepsilon_2^2[S^2X^2 - (1-\beta_1-\beta_2)p^2X^2] + \varepsilon_2^4[S^4X^4 - p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^2}{X^2} - (1-\beta_1-\beta_2)]p^2X^2 \\ \varepsilon_3^1[S^1X^1 - (1-\beta_1-\beta_2)p^1X^1] + \varepsilon_3^3[S^3X^3 - p^3X^3] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^3}{X^3} - 1]p^3X^3 \\ \varepsilon_4^2[S^2X^2 - (1-\beta_1-\beta_2)p^2X^2] + \varepsilon_4^4[S^4X^4 - p^4X^4] = -[\sum_{h=1}^{H}\phi_h \frac{x_h^4}{X^4} - 1]p^4X^4 \end{array}}$$

Sustituyendo la antepenúltima expresión en las condiciones anteriores llegamos a un esquema de fijación de precios que tiene en cuenta los costos privados de manera explícita en el ejercicio:

$$\varepsilon_1^1[S^1X^1-(1-\beta_1-\beta_2)(CA^1+C^{1_0})]+\varepsilon_1^3[S^3X^3-p^3X^3]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^1}{X^1}-(1-\beta_1-\beta_2)](CA^1+C^{1_0})$$
$$\varepsilon_2^2[S^2X^2-(1-\beta_1-\beta_2)(CA^2+C^{2_0})]+\varepsilon_2^4[S^4X^4-p^4X^4]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^2}{X^2}-(1-\beta_1-\beta_2)](CA^2+C^{2_0})$$
$$\varepsilon_3^1[S^1X^1-(1-\beta_1-\beta_2)(CA^1+C^{1_0})]+\varepsilon_3^3[S^3X^3-p^3X^3]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^3}{X^3}-1]p^3X^3$$
$$\varepsilon_4^2[S^2X^2-(1-\beta_1-\beta_2)(CA^2+C^{2_0})]+\varepsilon_4^4[S^4X^4-p^4X^4]=-[\sum_{h=1}^{H}\phi_h\frac{x_h^4}{X^4}-1]p^4X^4$$

Es importante tener en cuenta que los costos operativos en la hora pico pueden ser mayores que en la hora valle debido al desgaste y consumo de combustible en una situación de congestión y exigencia mayor del vehículo, de ahí la diferenciación propuesta para cada uno de los períodos.

Finalmente, si el modelo no discriminara entre horas pico y valle, fijando precios para transporte público (B) y privado (C)

$$\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_C^i(S^i-(1-\beta_1-\beta_2)p^c)X^i=0$$
$$\sum_{i=1}^{4}\varepsilon_B^i(S^i-p^B)X^i=0$$

Tal como en el caso b) antes estudiado los precios se asocian a un promedio ponderado del costo marginal social en las horas pico y valle, de tal modo que los mayores precios dependen del valor de las elasticidades que actúan como ponderadores en la fijación de precios homogéneos. La singularidad de este caso reside en que la fijación de precios de costo medio para los vehículos privados genera un menor valor para la función objetivo que la fijación de primera preferencia, lo cual se aprecia fácilmente en el descuento adicional del término (1-β_1-β_2).

4. Conclusiones

El trabajo se ocupó de la derivación de un sistema de precios óptimo para el transporte urbano en el que existe un sistema público de transporte masivo que compite con el transporte privado. El análisis se hizo considerando la generación de viajes en diferentes modos y tiempos. Se realizaron deducciones analíticas para cuatro casos de fijación de precios: a) sin restricciones sobre los precios pico y valle, b) con restricciones de igualdad; c) con restricciones de presupuesto del gobierno y finalmente un cuatro caso d) en el que los precios del transporte privado se fijaron de acuerdo con la regla del costo medio.

La ventaja del enfoque utilizado en los cuatro casos reside en el grado de detalle de las relaciones obtenidas, respecto a otros trabajos en los que se llega a una solución agregada sin discriminar cada una de las restricciones. Los resultados quedaron expresados teniendo en cuenta las elasticidades propias y cruzadas de los diferentes medios. Para efectos de simplificación se supuso que las elasticidades cruzadas, intra-modales entre horas pico y valle son cero, supuesto que puede levantarse sin ninguna dificultad.

Las reglas óptimas de los primeros tres casos estudiados permitieron apreciar que las elasticidades precio propias y las cruzadas actúan como ponderadores del sistema de precios óptimos. Adicionalmente, se pudo ver que la introducción del supuesto de precio sombra de los fondos públicos unitario y $\lambda=0$, implica que el gobierno puede usar instrumentos de primera preferencia, de tal modo que se llega a que el costo marginal social es una solución optima del problema.

Finalmente, el cuarto caso estudiado se ocupó de un sistema de precios que desviándose de la regla de primera preferencia, permita al gobierno cubrir los costos con el menor impacto sobre el bienestar social en términos de pérdida de eficiencia (óptimo de segunda preferencia). La opción mixta planteada en el ejercicio arrojó un valor menor para la función objetivo.

5. Referencias Bibliográficas

Arnott, R., and Kruss, M. (2003). *Principles of Transport Economics*. En el Handbook of Transportation Science, Second Edition, Kluwer Academic Publishers, NY-USA. Capítulo 18, pp. 689-726.

Baumol, W. J. y D. F. Bradford (1970), “Optimal Departures from Marginal Cost Pricing”, *American Economic Review*, **60**: 265-283.

Bös, D. (1985), “Public sector pricing” en A. J. Auerbach y M. Feldstein (eds.) Handbook of Public Economics, North Holland, Amsterdam: Elsevier Science, vol. I, 129-211.

De Borger, Bruno, Inge Mayeres, Stef Proost, and Sandra Wouters (1996). “Optimal Pricing of Urban Passenger Transport: A Simulation Exercise for Belgium.” *Journal of Transport Economics and Policy* **30**: 31-54.

Glaister, S. and D. Lewis (1978), "An Integrated Fares Policy for Transport in London" *Journal of Public Economics*, **9**, 341-355.

Glaister, Stephen (1974), “Generalised Consumer Surplus and Public Transport Pricing”, The Economic Journal, **84**, 849-867.

Panzar, J. C., (1976), “A Neoclassical Approach to Peak Load Pricing”, The Bell Jornal of Economics, pp. 521-530.

Parry, Ian W.H. and Kenneth A. Small (2002), "On the Optimal for Public Transport", *NBER*, Summer Wokshop, July.

Jansson, Jan Owen (1979), "Marginal Cost Pricing of Scheduled Transport Services." *Journal of Transport Economics and Policy* **13**: 268-294.

Mohring, H. (1972), "Optimization and Scale Economies in Urban Bus Transportation." *American Economic Review* **62**: 591-604.